と漸近展開されるがこれを用いると$x \gg 1$のとき

$$K(x)=\alpha\left\{-\frac{\sin^2\lambda}{\lambda^2}\frac{\cos x}{x^3}+\left(\frac{2\sin 2\lambda}{\lambda}-\frac{3\sin^2\lambda}{\lambda^2}\right)\frac{\sin x}{x^4}+O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right\}$$

がえられる。これはKaplan−Lyons[3]によつて求められた$K(x)$の漸近展開に他ならない。

文　　献

1) T.Kasuya, Prog. Theor. Phys. 16 (1956) 45.
2) K.Yosida, Phys. Rev. 106 (1957) 893.
3) T.A.Kaplan and D.H.Lyons, Phys. Rev. 129 (1963) 2072.
4) M.A.Ruderman and C.Kittel, Phys. Rev 96 (1954) 99.

Josephson 効果と Superfluidity

恒 藤 敏 彦（阪大基工）

（10月19日受理）

§1 Josephson 効果

超伝導における Josephson tunneling は，超伝導現象の本質を示す興味深い効果であり，実験的に殆んど疑う余地なく確かめられている。その理論については，Josephson, Ambegaokar & Baratoff, Anderson らの取扱いがある。[1] 比較的 elementary な方法で非常に面白い物理的な議論を行つているのはAnderson, Green 関数を使つてきれいに導いているのはAmbegaokar & Baratoffの論文であろう。Josephson tunneling は普通のquasi−particle によるものではなく，pair の tunneling であり，その特徴は，0 voltage で電流（d.c.)が流れること，それがbarrier

中のmagnetic flux の大きさによつて周期的に変化すること，Voltage の差があるとa.c. になることなどである。

この効果は，pair の wave function $<\varphi^{+}\varphi^{+}>$,あるいはGinzburg-Landau 理論のΨという，いわばマクロのwave functionのあることに帰因する。Ψの phaseは，1個の超伝導体では粒子数が一定であるから物理的な意味をもたない（BCS 理論では $|\triangle|$だけが問題になる）。しかし2つの超伝導体が barrier を通じて couple されているとき，それらの relative phase $\alpha_1-\alpha_2$は物理的な意味をもつ。そして実際計算すると，Coupling によるエネルギー変化も barrier を通して流れる電流も$\alpha_1-\alpha_2$に依存する項をもつ。

ところで，Andersonが指摘しているように，どんな相転移もみかけ上何らかの invariance をこわす。つまり系はもとのHamiltonian のもつ Symmetry をもたなくなり，その代りにあるマクロの量がその失われた Symmetry をになうことになる。Ferromagnetismの場合はTotal Spin の右向，団体の場合はその重心（げんみつには全運動量）がそれである。超伝導の場合は，phaseまで含めたΨである。ただこの場合，Ψの phase は上に述べたようにまつたく不確定である。ここで次の（思考）実験を考えてみよう。

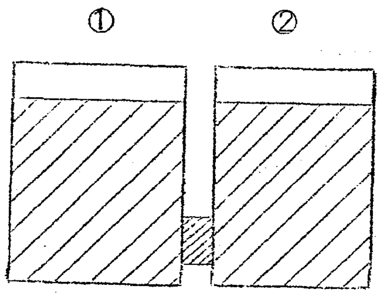
2つの超伝導金属S_1と S_2を別々にT_c以下に冷す。そして両者をbarrier を通して連結させる。このとき何が起るであろうか？　Ferroのときは，別別に充分離して（つまり磁場による相互作用を無視できるようにして）Curie point 以下に冷すと，各々のスピンの向きはまつたく random であろう。だから両者をひつつけたとき，必ずしもエネルギー最低の状態にはならない。そしてなんらかの振動が生じるであろう。超伝導の場合，2つを連結したとき，relative phase $\alpha_1-\alpha_2$ はどんな値をとるか？　連結する前には，α_1とα_2はまつたく不確定であつた。果して$\alpha_1-\alpha_2$の initial value

を考えることは意味があるか？ 連結したとき系は必ずしもエネルギー最低の状態にあるとも考えられない。もし $\alpha_1-\alpha_2$ が0でない値をとれば，おそらく a.c. が流れ，それが電磁波か何かによつてdamp するのであろう。観測できるかどうかは別として，この問題はどう考えたらよいであろうか？

§2 He Ⅱ における Josephson 効果

超伝導と超流動はよく知た現象である。Josephson 効果のような現象が He Ⅱ でもあるであろうか？

Josephson 効果で大切なことは，2つの bulk superconductors が weak couplingしているということである。その conpling が tunneling である必要はないと思われる。barrier の中に非常に細い導体の bridge があつてもよい。本質的なことはそこで Ψ_1 と Ψ_2 とが ovenlap することである。He の場合，むろん tunneling は考え難いが，weak coupling ならありうるのではないか？ 非常にうすい膜に He atom が通過できるくらいの穴があるものでもよいし，ごく細い Capillary を考えてもよい。それによつて2つの bulk He Ⅱ が連結されているとしよう。



Fig・1

Hamiltonian を

$$H = H_1 + H_2 + H_{\text{int}} \qquad (1)$$

とし，H_{int} を摂動と考える。Unperturbed stateは1 および 2 にそれぞれ localize した粒子状態 $\varphi_{ik}(\vec{X})$ および $\varphi_{2q}(\vec{X})$ で記述される。

$$\psi_i(\vec{X}) = \varphi_{io}(\vec{X})a_o + \sum_k \varphi_{ik}(\vec{X})a_k, \quad i = 1, 2 \qquad (2)$$

$\varphi_{io}(\vec{X})$ は最低の状態で，そこにマクロの数の粒子 N_{oi} が condenseしているとする。H_{int} は，超伝導の場合の tunneling でやつたように，

$$H_{\text{int}} = \sum_{k,q} \{S_{kq} a_k{}^+ c_q + S_{kq}^* c_q^+ a_k\} \qquad (2)$$

と書けるであろう。(a_k は1の，c_q は2の annihilation operator) つまり S_{kq} は2の q という状態にある粒子を1の k という状態に移す。S_{kq} は φ_{1k} と φ_{2k} と φ_{2q} の overlap で表わされるであろう。(H_{int} が (2) のように書けることは仮定であつて，Junctionの性質によつては可能でないであろう。)

このとき，1の粒子数 $N_1 = \sum_k c_k{}^+ c_k$ の時間的変化を考える：

$$i\hbar\langle\dot{N}_1\rangle = \langle[N_1, H]\rangle = 2i\,\mathrm{Im}\sum_{k,q} S_{kq}\langle c_k{}^+ a_q\rangle \qquad (3)$$

この中で，Condensed State の項をとりだしてみよう：

$\mathrm{Im}\, S_{oo}\langle c_o^+ a_o\rangle$。$\langle c_o^+ a_o\rangle$ は普通ならむろん0であるが，condensate のあるときには0でない／(？)。なぜかというと，Junction があるとき，N_{10} というマクロの数の粒子がある状態から1つの粒子をとりさつて，N_{20} に移しても，全系の状態は殆んど変化しない。このような，N_{01} (したがって N_{02}) が異る多くの状態は，すべて degenerate しており，実際の合成系の ground state では，両側の系の間に overlap のため1種の coherence ができているといつてもよい。そのために $\langle c_o^+ a_o\rangle$ は0でなく，かえつてマクロの量 $\sqrt{N_{10}N_{20}}$ に比例する。φ_{10} と φ_{20} の phase を explicit に書くと，

$$\mathrm{Im}\ S_{oo}\langle c_o^+ a_o\rangle = \sqrt{N_{10}N_{20}}\ \mathrm{Im}\ S_{oo}e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} \qquad (4)$$

となる。したがって，両側の chemical potential に差がなくても flow がありうる。もし差があれば $\exp i\ \alpha_1-\alpha_2+(\mu_1-\mu_2)t$ となり，この flow は時間的に振動する。(4)は Coupling の1次に比例していることに注意しよう。超伝導体の場合には pair であつたから，S の2次の摂動で始めて $\langle a^+a^+\rangle\langle c\,c\rangle$ の形の項が出てきた。He II の場合には1粒子の

移動だから1次からこのような項が現われる。

§3　Order estimation

実際に上で考えたようなweak couplingがあつて，観測できるであろうか?

問題のflow rate は最大$n_o|S|/\hbar$程度である。* n_oはCondensate の粒子密度。ここで単位時間に$10^{-5}cm^3$ のHe が流れるとする。これは10^{18}個の粒子の流れであるから，$n_0\sim10^{23}$とすると，$|S|$は10^{-32}erg となる。ところでCondensation していないBose gasの場合と比較してみよう。この場合は簡単な2次の摂動で

$$<\dot{N}_1> = -\frac{2m^3}{\pi^3\hbar^7}|S|^2\beta^{-2}\{F_2(\alpha_1)-F_2(\alpha_2)\} \qquad (5)$$

という結果がえられる。ただしS_{kq}をconstant S で近似した。$\beta=1/kT$，$\alpha=-\beta\mu$ で，

$$F_2(\alpha)=\int_0^\infty dx\,\frac{x}{e^{\alpha+x}-1} \qquad (6)$$

である。Chemical potential が同じならflowはない。その差をごく大ざつぱに$\triangle\mu = mg\triangle h$（$g$は重力定数，$\triangle h$は高さの差）とおいて，$\triangle h=0.1$ cm ととろう。そして温度を数°Kとして(5)を計算してみると

$$<\dot{N}_1>\sim10^{82}|S|^2 \qquad (7)$$

となる。$S\sim10^{-32}$を入れると$<\dot{N}_1>\sim10^{18}$程度になる。だから，非常に粗つぽくいつて，normal の状態でこれくらいのtransfer が起るようなjunction があればよい。（もちろん，長いcapillaryを流れるような場合には上の取扱いはあてはまらない。だからここではSuperflow を問題にしているのではない。）

また$\triangle\mu$があつたときの振動は，$10^7\times\triangle h$ c/sec くらいの振動数をも

* (2)のSは実は両側のvolumeに依存する。簡単のため以下では$\Omega_1\cdot\Omega_2=1$とする。

つであろう。

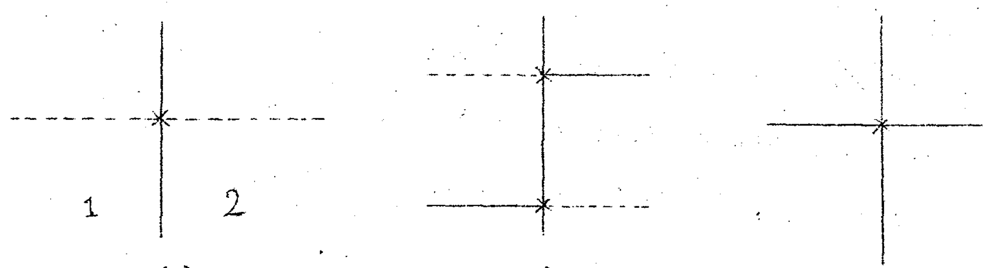
§4 low density limit のモデル

He Ⅱ の low density limitの理論を使つて，もう少し計算を進めてみると面白い問題が出てくる。

(2)のH_{int}を0 state に関するものだけわけてかくと，

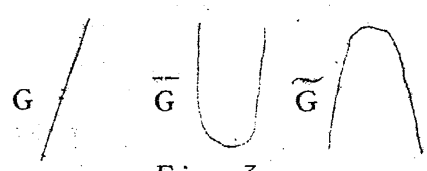
$$
H_{\mathrm{int}} = S_{oo} c_o^+ a_o + \sum_{k}{}' S_{ko} c_k^+ a_o + \sum_{q}{}' S_{oq} c_o^+ a_q + \sum_{k,q}{}' S_{kq} c_k^+ a_q + \mathrm{c.c.} \tag{8}
$$

となる。これらはグラフでかくと第2図のようになる。a) はすでに議論した。2次の摂動ではいろいろの項がでてくるが，ここでCondensate が関与するプロセス，つまりpressure head がなくても flowを与えるプロセスだけとりあげよう。Beliaev および Hugenholtz−Pines[2)]の理論には普通のGreen関数のほかに，$\overline{G}$と$\widetilde{G}$という2種類のものが現われる(第3図)。$\overline{G}$は，$\psi(x)=\varphi_o(x)+\psi'(x)$と0−state を分離したとき，$-i< T \psi^{+1}(x)\psi^{+1}(x') >$で定義される。これは実は2つのCondensateの粒子を消すプロセスを含んでいるから，Condensate の波動函数のphaseをα

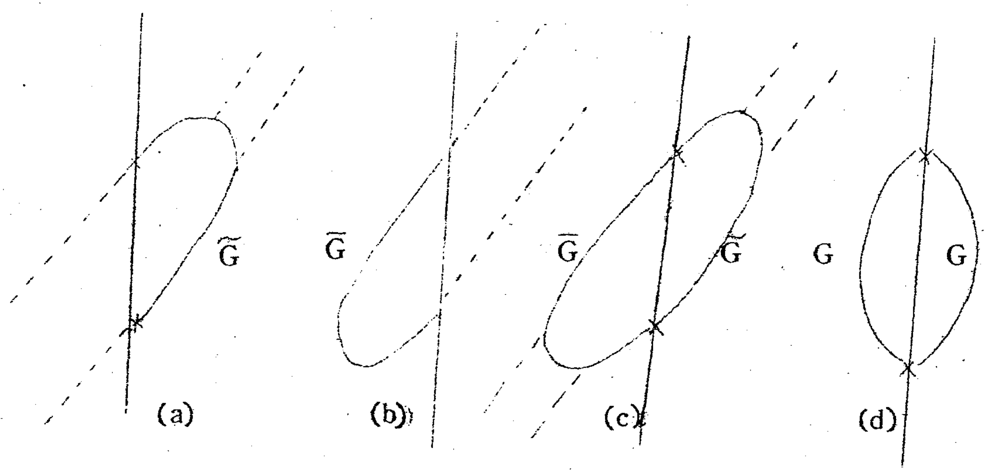


(a) (b) (c)

Fig・2 点線はcondensate の粒子を表す



Fig・3



Fig・4

としたとき，$e^{2i\alpha}$ に比例している。この $\overline{G}$ と $\widetilde{G}$ を考えると，問題になる過程として第4図にあげたものがある。すべて一方の側のCondensateから2粒子をとつて，他方に移す過程になつている。普通の過程は第4図d）であつて，これは$\Delta\mu=0$のとき消える。たとえば第4図c）という過程は，$<\dot{N}_1>$に対し

$$\sin\left[2(\alpha_1-\alpha_2)\right]\frac{2m^3}{\pi^3\hbar^7}|S|^2\left(\frac{n_0 a\hbar^2}{2m}\right)^2\log\left|1+C/(2n_0 a\hbar^2/m)\right| \quad (9)$$

という寄与をする。ここでaはscattering length，CはCut off（Sをconstant とすると積分は発散する。実際にはS_{kq}のkとqの状態のenergyが非常に異なれば，S_{kq}は0になると思われるから発散しない）。この場合には，sin $2(\alpha_1-\alpha_2)$に比例することに注意したい。*（9）と（5）とを比較してみよう。$n_0 a\hbar^2/2m$ は大体温度にして数度とみてよいであろう。したがつて最後のfactor以外は同じ程度の大きさである。最後のfactor は（9）では1の程度とすると，それは（5）に非常に大きなΔhを与えたときに対応する。$F_2(\alpha_1)-F_2(\alpha_2)\sim\alpha_1-\alpha_2$（$\alpha_{1,2}\ll1$，$(\alpha_1-\alpha_2)/\alpha_{1,2}\ll1$のとき）で，$mg/k\sim10^{-3}$だからそう考えてよいであろう。あるいはこれがsuper leak の説明であるかもしれない。また（9）は（4）よりもはるか

*）超伝導の場合でも，4次の摂動からくるJosephson currentへの寄与はsin〔$2(\alpha_1-\alpha_2)$〕に比例するであろう。

に大きい。

以上の議論は明らかにまだ不完全なものである。しかしもし本当なら，junction による weak coupling の場合，それを通して流れる superflow ($\Delta\mu=0$) には Condensate が本質的な役割をしていることになる。したがつて n_0 は物理的に問題になる量である。

まだ充分検討してもいないことを書いたが，批判の対象になれば幸いである。

1) B.D. Josephson, Physics Letters 1, 251 (1962)
P.W. Andenson, Preprint
V. Ambegaokar and A. Baratoff, Phys. Rev. Letters, 10, 486 (1963)
2) S.T. Beliaev, J.E.T.P. 34, 417 (1958)
N.M. Hugenholtz and D. Pines, Phys. Rev. 116, 489 (1959)